JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 20, 196–219 (1977)

Schnitte für die metrische Projektion*

GÜNTHER NÜRNBERGER

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Erlangen-Nürnberg, 8520 Erlangen, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Received November 30, 1975

EINLEITUNG

Ausgangspunkt der Theorie bester Approximation ist die Frage nach der Charakterisierung, Existenz und Eindeutigkeit von Elementen bester Approximation und die Aufstellung numerischer Verfahren (siehe Achieser [1], Cheney [10], Meinardus [17] und Singer [21, 23]). In den letzten Jahren werden insbesondere Schnittprobleme der mengenwertigen metrischen Projektion P_G (Definition 1) untersucht (siehe Singer [23, Sect. 4]). Unsere Arbeit ist ebenfalls diesem Problemkreis gewidmet.

In Abschnitt 1 befassen wir uns mit der Frage der Existenz stetiger Schnitte für die metrische Projektion. Die bisher bekannten Ergebnisse zeigen, daß diese Art von Schnitten nur unter starken Voraussetzungen existiert (siehe Blatter [2, 4], Blatter *et al.* [5], Brown [8, 9], Lazar [15], und Lazar *et al.* [16]). Lazar *et al.* [16] bewiesen eine Nichtexistenzaussage für stetige Schnitte der metrischen Projektion in L_1 über einem nichtatomaren Maßraum. Wir zeigen, daß für strikt konvexe Räume, also insbesondere für die L_p-Räume $(1 < p < \infty)$ bei proximinaler, nicht tschebyscheffscher Basismenge G kein stetiger Schnitt für P_G existiert (Korollar 4). Beispielsweise erlauben die verallgemeinerten rationalen Funktionen in L_p $(1 < p < \infty)$ im Sinne von Blatter [3] keinen stetigen Schnitt für P_G.

Lazar *et al.* [16] versuchten zu zeigen, daß unter gewissen Voraussetzungen in $C(X)$, X zusammenhängend, ein stetiger Schnitt für die metrische Projektion genau dann existiert, wenn die Basismenge tschebyscheff ist. Brown [9] gab jedoch ein Gegenbeispiel für diese Aussage. Wir zeigen, daß unter allgemeineren Voraussetzungen in $C(X)$, X zusammenhängend, ein stetiger Schnitt für die metrische Projektion mit der Nulleigenschaft (Definition 7) genau dann existiert, wenn die Basismenge tschebyscheff ist (Korollar 10). Nach Michaels Schnittsatz (Michael [18]) folgt aus der Unterhalb-Stetigkeit von

* Erster Teil meiner Dissertation "Dualität von Schnitten für die metrische Projektion und von Fortsetzungen kompakter Operatoren," Erlangen, 1975.

ISSN 0021-9045

P_G die Existenz eines stetigen Schnittes für P_G. Die Umkehrung gilt i.a. nicht (siehe Lazar *et al.* [16]). Mit unseren Ergebnissen zeigen wir, daß in $C(X)$, X nicht notwendig zusammenhängend, aus der Existenz eines stetigen Schnittes für P_G mit der Nulleigenschaft die Unterhalb-Stetigkeit von P_G folgt (Satz 12).

Schließlich beweisen wir, daß unter gewissen Voraussetzungen in L_1 über einem nicht notwendig nichtatomaren Maßraum für einen eindimensionalen Teilvektorraum G ein stetiger Schnitt mit der Nulleigenschaft für P_G genau dann existiert, wenn G tschebyscheff ist (Korollar 15).

Da stetige Schnitte für die metrische Projektion nur unter starken Voraussetzungen existieren, erhebt sich die Frage, ob die metrische Projektion Schnitte mit abgeschwächten Stetigkeitseigenschaften unter schwächeren Voraussetzungen zuläßt. Durch Anwendung von Sätzen über meßbare Schnitte von Himmelberg, van Vleck [12] für beliebige mengenwertige Abbildungen (Satz 2 und Satz 3) zeigen wir in Abschnitt 2, daß bei schwachen Kompaktheitseigenschaften der Basismenge G ein Borel-meßbarer Schnitt für P_G existiert (Satz 4, 5 und 7, Korollar 6 und 9).

Schießlich behandeln wir in Abschnitt 3 die Frage, welche Schnitteigenschaften die metrische Projektion besitzt, falls ein beliebiger proximinaler Teilvektorraum als Basismenge vorliegt. Wir beweisen, daß jede quasi-additive mengenwertige Abbildung mit einer gewissen Fixpunkteigenschaft einen quasi-additiven Schnitt zuläßt (Satz 2). Außerdem zeigen wir, daß für jede homogene mengenwertige Abbildung ein homogener Schnitt existiert (Satz 4). Diese Ergebnisse können sofort auf die metrische Projektion angewandt werden. Unter gewissen Voraussetzungen gilt sogar, daß jede quasi-lineare mengenwertige Abbildung einen quasi-linearen Schnitt mit der Sonneneigenschaft (Definition 11) besitzt (Satz 12). Auch dieser Satz kann sofort auf die metrische Projektion angewandt werden.

1. Stetige Schnitte für die metrische Projektion

Zu Beginn definieren wir die grundlegenden Begriffe zur metrischen Projektion:

1. Definition. Sei E ein metrischer Raum und G eine Teilmenge von E. Für alle x aus E sei $d(x, G) := \inf\{d(x, g) : g \in G\}$ und $P_G(x) := \{g_0 \in G: d(x, g_0) = d(x, G)\}$.
Die Elemente aus $P_G(x)$ heißen *Elemente bester Approximation* (für x bzgl. G).

G heißt *proximinal*, falls $P_G(x)$ nicht leer ist für alle x aus E. G heißt *semi-tschebyscheff*, falls $P_G(x)$ höchstens einpunktig ist für alle x aus E. G heißt *tschebyscheff*, falls G proximinal und semi-tschebyscheff ist. Falls G proximinal ist, heißt die oben definierte Abbildung P_G von E in 2^G die (mengenwertige) *metrische Projektion* bzgl. G, wobei $2^G := \{G' \subseteq G : G' \neq \phi\}$ ist.

Wir nennen G die *Basismenge* der metrischen Projektion $P_G : E \to 2^G$. Falls die Basismenge proximinal und nicht tschebyscheff ist, sprechen wir vom *mengenwertigen Fall*. Falls die Basismenge tschebyscheff ist, sprechen wir vom *Tschebyscheff-Fall* und betrachten die metrische Projektion in den meisten Situationen als punktwertige Abbildung, d.h. als Abbildung von E in G.

Seien E und G Mengen und $F : E \to 2^G$ eine beliebige mengenwertige Abbildung, so heißt eine Abbildung $f: E \to G$ ein *Schnitt* für $F: E \to 2^G$, falls $f(x)$ aus $F(x)$ ist für alle x aus E. Besitzen die Mengen E und G gewisse Strukturen, etwa lineare, topologische oder metrische Strukturen, und besitzt ein Schnitt bestimmte Eigenschaften bzgl. dieser Strukturen, so sprechen wir beispielsweise von einem stetigen, Borelmeßbaren, homogenen, quasiadditiven bzw. linearen Schnitt. Die genauen Definitionen werden in den einzelnen Abschnitten gegeben.

Als erstes zeigen wir eine Nichtexistenzaussage für stetige Schnitte der metrischen Projektion in strikt konvexen Räumen, benötigen aber vorweg die folgende Definition:

2. Definition. Sei E ein normierter Raum.

(1) E heißt *strikt konvex*, wenn für alle x, y aus E mit $x \neq y$ gilt: ist $\|x\| = 1 = \|y\|$, so folgt $\|\frac{1}{2}(x + y)\| < 1$.

(2) Für alle x, y aus E sei $[x, y] := \{ax + (1 - a) y : 0 \leq a \leq 1\}$.

(3) Sei x aus E und $r > 0$, so definieren wir:

$$K(x, r) := \{y \in E : \|x - y\| \leq r\},$$
$$K'(x, r) := \{y \in E : \|x - y\| < r\},$$
$$S(x, r) := \{y \in E : \|x - y\| = r\}.$$

Wir beweisen nun den folgenden Satz 3, aus dem sich die oben erwähnte Nichtexistenzaussage als Korollar 4 ergeben wird.

3. Satz. *Sei E ein normierter Raum und G eine proximinale Teilmenge von E. Es existiere ein stetiger Schnitt $f_G : E \to G$ für $P_G: E \to 2^G$.*

Dann ist $[g, f_G(x)] \subseteq S(x, d(x, G))$ für alle x aus E und alle g aus $P_G(x)$.

Beweis. Zunächst zeigen wir die folgende *Behauptung*: Sei G eine proximinale Teilmenge von E und existiere ein stetiger Schnitt f_G für P_G und seien 0 aus $E\setminus G$ und g_0 aus $P_G(0)$. Dann gilt: $[g_0, f_G(0)] \subseteq S(0, d(0, G))$.

Beweis der Behauptung. Für g_0 aus $P_G(0)$ zeigen wir: $[g_0, f_G(0)] \subseteq S(0, d(0, G))$.

(1) Zunächst zeigen wir für alle $0 < b < 1$: $A_b := S(0, d(0, G)) \cap S(bg_0, d(bg_0, G))$ ist sternförmig um g_0, d.h. $ag_0 + (1 - a) z$ ist aus A_b für alle z aus A_b und alle $0 \leqslant a \leqslant 1$.

(Dies wurde von Klee in [13] angegeben.)

Beweis von (1). Seien $0 < b < 1$ und z aus A_b, so gilt:
$\|z\| = d(0, G) = \|g_0\|$ und $\|z - bg_0\| = d(bg_0, G) = (1 - b)\, d(0, G)$.
Im folgenden beachte man die Tatsache, daß, falls die Endpunkte einer 'Strecke" $[x, y]$ und ein Punkte im "Inneren" dieser Strecke gleiche Norm besitzen, alle Elemente der Strecke dieselbe Norm besitzen. Dies beweist man leicht durch Widerspruch.

(a) Es gilt:

$$\|bg_0 + (1 - b)((z - bg_0)/(1 - b))\| = \|z\| = d(0, G).$$

Daraus folgt:

$$\|cg_0 + (1 - c)((z - bg_0)/(1 - b))\| = d(0, G) \text{ für alle } 0 \leqslant c \leqslant 1.$$

Wir definieren nun: $c := 2b - b^2$, d.h. $0 < c < 1$.
Damit gilt dann:

$$\|(2b - b^2)\, g_0 + (1 - (2b - b^2))((z - bg_0)/(1 - b))\| = d(0, G)$$

und

$$\|bg_0 + (1 - b)\, z\| = d(0, G) \text{ und } \|ag_0 + (1 - a)\, z\| = d(0, G)\ (0 \leqslant a \leqslant 1)$$

und

$$ag_0 + (1 - a)\, z \in S(0, d(0, G)) \qquad (0 \leqslant a \leqslant 1).$$

(b) Weiter gilt:

$$\|ag_0 + (1 - a)((z - bg_0)/(1 - b))\| = d(0, G) \ (0 \leqslant a \leqslant 1).$$

Daraus folgt: $\|ag_0 + (1 - a)\, z - bg_0\| = (1 - b)\, d(0, G) = d(bg_0, G)$ $(0 \leqslant a \leqslant 1)$ und $ag_0 + (1 - a)\, z - bg_0 \in S(bg_0, d(bg_0, G))$ $(0 \leqslant a \leqslant 1)$.
Damit ist (1) gezeigt.

(2) Wir zeigen nun: Für alle $0 < b < 1$ gilt

$$bg_0 \in A := \{x \in E \setminus G\colon g_0 \in P_G(x) \text{ und } [g_0, f_G(x)] \subseteq S(x, d(x, G))\}.$$

Beweis von (2). Für $0 < b < 1$ gilt:

$$bg_0 \in E \setminus G,\ g_0 \in P_G(bg_0)$$

und

$$ag_0 + (1 - a) f_G(bg_0) \in S(bg_0, d(bg_0, G)) \qquad (0 < a < 1).$$

Letzteres zeigen wir folgendermaßen:
Zunächst gilt: $f_G(bg_0)$ ist aus $S(bg_0, d(bg_0, G)) \cap S(0, d(0, G))$. Denn angenommen $\|f_G(bg_0)\| > d(0, G)$, so folgt:

$$\left\| \frac{f_G(bg_0) - bg_0}{1 - b} \right\| = \left\| \frac{f_G(bg_0)}{1 - b} - \frac{b}{1-b}\, g_0 \right\| > d(0, G),$$

was ein Widerspruch zu $\|f_G(bg_0) - bg_0\| = d(bg_0, G) = (1 - b)\, d(0, G)$ ist.

Aus (1) folgt nun: $ag_0 + (1 - a) f_G(bg_0) \in S(bg_0, d(bg_0, G))$ $(0 < a < 1)$. Damit ist (2) gezeigt.

(3) Wir zeigen: $A := \{x \in E \setminus G: g_0 \in P_G(x)$ und $[g_0, f_G(x)] \subseteq S(x, d(x, G))\}$ ist abgeschlossen in $E \setminus G$:

Beweis von (3). Sei $x \in E \setminus G$ und (x_n) eine Folge in A, die gegen x konvergiert. Dann zeigen wir: $x \in A$.

(a) g_0 ist aus $P_G(x)$, denn es gilt: Sei n aus $\mathbb{N}$ und x_n aus A, dann ist g_0 aus $P_G(x_n)$, woraus folgt, daß g_0 aus $P_G(x)$ ist, *da* (x_n) gegen x konvergiert.

(b) Es ist $[g_0, f_G(x)]$ eine Teilmenge von $S(x, d(x, G))$, denn es gilt: Sei n aus $\mathbb{N}$ und x_n aus A, dann ist $\|ag_0 + (1 - a) f_G(x_n) - x_n\| \leq d(x_n, G)$ $(0 < a < 1)$. Für $0 < a < 1$ zeigen wir: $\|ag_0 + (1 - a) f_G(x) - x\| \leq d(x, G)$. *Da* (x_n) gegen x konvergiert und f_G stetig ist, gilt: $ag_0 + (1 - a) f_G(x_n) - x_n$ konvergiert gegen $ag_0 + (1 - a) f_G(x) - x$. Da sie Abbildungen $x \to \|x\|$ und $x \to d(x, G)$ stetig sind, folgt durch Grenzübergang von x_n zu x: $\|ag_0 + (1 - a) f_G(x) - x\| \leq d(x, G)$. Aus (a) und (b) folgt, daß x aus A ist. Damit ist (3) gezeigt.

(4) Wir zeigen schließlich: $[g_0, f_G(0)] \subseteq S(0, d(0, G))$.

Beweis von (4). Aus (2) folgt, daß bg_0 aus A ist für alle $0 < b < 1$ und aus (3) folgt, daß A abgeschlossen ist in $E \setminus G$. Daraus folgt, daß 0 aus A ist, da bg_0 aus $E \setminus G$ ist für alle $0 < b < 1$, woraus (4) folgt. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Wir haben also bisher Folgendes gezeigt: Falls $G' \subseteq E$ proximinal ist, falls für G' ein stetiger Schnitt $f_{G'}$ für $P_{G'}$ existiert und 0 aus $E \setminus G'$ und g_0' aus $P_{G'}(0)$ ist, gilt: $[g_0', f_{G'}(0)] \subseteq S(0, d(0, G'))$.

Daraus folgt nun: Sei $G \subseteq E$ proximinal und existiere ein stetiger Schnitt f_G für P_G und seien x_0 $(x_0 \neq 0)$ aus $E \setminus G$ und g_0 aus $P_G(x_0)$, dann zeigen wir: $[g_0, f_G(x_0)] \subseteq S(x_0, d(x_0, G))$. Dazu definieren wir: $G' := \{x_0 - g : g \in G\}$. Dann ist 0 aus $E \setminus G'$ und außerdem G' proximinal, denn es gilt: Da G proximinal ist, folgt: Für alle x aus E existiert ein g_x aus G mit $\|x - g_x\|$

$\inf\{\|x - g\| : g \in G\}$. Für alle x aus E definieren wir: $g_x' := x_0 - g_{x_0-x} \in G'$. Daraus folgt: $\|x - g_x'\| = \|(x_0 - x) - g_{x_0-x}\| = \inf\{\|(x_0 - x) - g\| : g \in G\}$ $= \inf\{\|x - g'\| : g' \in G'\}$, d.h. g_x' ist aus $P_{G'}(x)$. Also ist G' proximinal.

Wir definieren für alle x aus E: $f_{G'}(x) := x_0 - f_G(x_0 - x) \in G'$. Dann ist für alle x aus $E f_{G'}(x)$ aus $P_{G'}(x)$, denn es gilt:

$$\begin{aligned}\|x - f_{G'}(x)\| &= \|(x_0 - x) - f_G(x_0 - x)\| = \inf\{\|(x_0 - x) - g\| : g \in G\}\\ &= \inf\{\|x - g'\| : g' \in G'\}.\end{aligned}$$

Damit ist $f_{G'}$ ein stetiger Schnitt für $P_{G'}$. Nach dem bisher Bewiesenen folgt nun: Für alle g' aus $P_{G'}(0)$ ist $[g', f_{G'}(0)] \subseteq S(0, d(0, G'))$. Da g_0 aus $P_G(x_0)$ ist, folgt: $\|0 - (x_0 - g_0)\| = \inf\{\|x_0 - g\| : g \in G\} = \inf\{\|0 - g'\| : g' \in G'\}$, d.h. $x_0 - g_0$ ist aus $P_{G'}(0)$. Daraus folgt schließlich für alle $0 < a < 1$:

$$\begin{aligned}&\|a(x_0 - g_0) + (1 - a) f_{G'}(0)\|\\ &\quad = \|a(x_0 - g_0) + (1 - a)(x_0 - f_G(x_0))\|\\ &\quad = d(0, G') = d(x_0, G), \text{ d.h. } \|x_0 - (a g_0 + (1 - a) f_G(x_0))\| = d(x_0, G),\\ &\quad \text{d.h. } [g_0, f_G(x_0)] \subseteq S(x_0, d(x_0, G)).\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: $[g, f_G(x)] \subseteq S(x, d(x, G))$ für alle $x \in E \setminus G$ und alle $g \in P_G(x)$.

Trivialerweise gilt: $[g, f_G(x)] \subseteq S(x, d(x, G))$ für alle $x \in G$ und alle $g \in P_G(x)$. Also gilt schließlich: $[g, f_G(x)] \subseteq S(x, d(x, G))$ für alle $x \in E$ und alle $g \in P_G(x)$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Aus Satz 3 ergibt sich schließlich folgendes Korollar:

4. Korollar. *Sei E ein strikt konvexer normierter Raum und G eine proximinale Teilmenge von E. Es existiere ein stetiger Schnitt $f_G: E \to G$ für $P_G: E \to 2^G$. Dann ist G tschebyscheff.*

Beweis. Das Korollar folgt unmittelbar aus Satz 3 und der Eigenschaft strikt konvexer normierter Räume.

Wir haben also gezeigt, daß in einem strikt konvexen Raum bei proximinaler, nicht tschebyscheffscher Basismenge, und dies ist der einzig wichtige Fall für Schnittprobleme, kein stetiger Schnitt für die metrische Projektion existiert. Damit haben wir der Nichtexistenzaussage von Lazar *et al.* in [16] im Raum L_1 bei nichtatomarem Maßraum und endlich-dimensionaler Basismenge über stetige Schnitte für P_G insbesondere eine Nichtexistenzaussage für die L^p-Räume $(1 < p < \infty)$, ebenso wie etwa für Hilberträume hinzugefügt.

Um ein weiteres Korollar formulieren zu können, benötigen wir die folgenden Begriffe:

5. Definition. (1) Ein normierter Raum E heißt *glatt* genau dann, wenn

für alle x aus E mit $\|x\| = 1$ genau ein f aus E' existiert mit $\|f\| = 1$ und $f(x) = 1$.

Sei E ein metrischer Raum und G eine nicht leere Teilmenge von E.

(2) G heißt *approximativ-kompakt* genau dann, wenn für alle x aus E und alle Folgen (g_n) in G, falls $d(x, g_n)$ gegen $d(x, G)$ konvergiert, ein g aus G und eine Teilfolge (g_{n_i}) von (g_n) existiert, die gegen g konvergiert.

(3) G heißt *beschränkt-kompakt*, falls für alle x aus E und alle $r > 0$ die Menge $K'(x, r) \cap G$ relativ-kompakt ist. (Hierbei sei $K'(x, r)$ analog Definition 2 für metrische Räume definiert.)

Es ist bekannt, daß jeder endlich-dimensionale Teilvektorraum eines normierten Raumes und jede kompakte, sowie jede beschränktkompakte, abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes approximativ-kompakt ist und daß die metrische Projektion bei einer approximativ-kompakten Basismenge im Tschebyscheff-Fall stetig ist. Außerdem ist jede approximativ-kompakte Basismenge proximinal (siehe Singer [21]).

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir nun folgendes Korollar:

6. KOROLLAR. *Sei E ein strikt konvexer, glatter Banachraum und G eine beschränkt-kompakte, abgeschlossene Teilmenge von E. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent*:

(1) *Es existiert ein stetiger Schnitt f_G: $E \to G$ für P_G: $E \to 2^G$.*

(2) *G ist tschebyscheff.*

(3) *G ist konvex.*

Beweis. Das Korollar folgt aus Korollar 4, einem Satz von Vlasov (Singer [21], Theorem 2.2, S. 368) und der bekannten Aussage, daß in einem strikt konvexen Raum jede konvexe Menge semitschebyscheff ist.

Brosowski und Deutsch bewiesen in [6] Korollar 4 und Korollar 6 für die Inner-Radial-Unterhalbstetigkeit von P_G anstelle der Existenz eines stetigen Schnittes für P_G, was eine verschärfte Form von Aussagen in Blatter *et al.* [5] darstellt. Als nächstes beweisen wir eine Nichtexistenzaussage für stetige Schnitte mit der Nulleigenschaft, der Begriff wird später definiert, für die metrische Projektion im Raum $C(X)$. Mit $C(X)$ bezeichnen wir den Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf X, wobei X ein kompakter Hausdorffraum sei. Für ein f aus $C(X)$ und einen proximinalen Teilvektorraum G von $C(X)$ sei $Z(P_G(f)) := \{x \in X: g(x) = 0$ für alle g aus $P_G(f)\}$. Zunächst benötigen wir die folgende Definition:

7. DEFINITION. Sei E ein normierter Raum, G eine proximinale Teilmenge von E und $f_G : E \to G$ ein Schnitt für P_G: $E \to 2^G$. Wir sagen, der Schnitt f_G

besitzt die *Nulleigenschaft* genau dann, wenn $f_G(x) = 0$ ist für alle x aus $P^{-1}(0)$. wobei $P_G^{-1}(0) := \{x \in E: 0 \in P_G(x)\}$ sei.

8. *Bemerkung.* Die Nulleigenschaft stellt in gewisser Weise eine natürliche Bedingung an den Schnitt dar, insofern als man bei expliziter Angabe der Auswahl des Schnittelements gerade dann diese Eigenschaft erhält, wenn man, was naheliegt, für alle x aus E definiert: $f_G(x)$ sei aus $P_G(x)$ so gewählt, daß $\|f_G(x)\| = \inf\{\|g\| : g \in P_G(x)\}$ ist.

Man vergleiche etwa die Beweise zu Theorem 4 [8] und Theorem 2.1 (Lazar *et al.* [16]).

Unter Verwendung einiger Lemmas aus Blatter *et al.* [5] beweisen wir nun den folgenden Satz:

9. SATZ. *Sei $E = C(X)$, wobei X ein kompakter Hausdorffraum ist, G ein proximinaler Teilvektorraum von E und $\langle P_G(f)\rangle$ endlich-dimensional für alle f aus E. Es existiere ein stetiger Schnitt f_G: $E \to G$ für P_G: $E \to 2^G$ mit der Nulleigenschaft. Dann ist $Z(P_G(f))$ offen für alle f aus $P_G^{-1}(0)$.*

Beweis. Angenommen, es existiert ein h aus $P_G^{-1}(0)$, so daß $Z(P_G(h))$ nicht offen ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\|h\| = 1$ sei. Dann existiert, da $\langle P_G(h)\rangle$ endlich-dimensional ist, ein p aus $P_G(h)$ und ein w aus $Rd(Z(P_G(h)))$, so daß für alle U aus $U(w)$ ein y aus U existiert mit $p(y) > 0$ und $h(w) \geqslant 0$.

$p(y)$ kann als echt größer Null angenommen werden, da man nötigenfalls h durch $h - p$ ersetzen kann, denn es gilt: $0, -p$ ist aus $P_G(h-p)$ und $(h-p)(w) = h(w) - 0 = h(w)$ und $Z(P_G(h-p)) = Z(P_G(h))$.

Wir beweisen nun den Satz unter Verwendung der Lemmas 3 bis 8 zu Theorem 2 in Blatter *et al.* [5]. Aus Lemma 3 folgt:

(1) Es existiert ein $r > 0$ und ein q aus $P_G(h)$, so daß für alle t aus $P_G(h)$ ein U aus $U(w)$ existiert mit: Ist $t \geqslant q$ auf U, dann folgt $\|t\| \geqslant r$.

Außerdem existiert eine Funktion h' aus E mit den folgenden Eigenschaften:

(2) $h'(w) = 1$ und $\|h'\| = 1$ und $0, q$ ist aus $P_G(h')$.

Dies folgt aus Lemma 4. Aus Lemma 5 folgt:

(3) Für alle k aus $P_G(h')$ mit $\|k\| \leqslant \frac{1}{2}$ ist k aus $P_G(h)$. Es existiert weiter für alle n aus $\mathbb{N}$ eine Funktion q_n mit den Eigenschaften:

(4) Für alle $n \geqslant 2$ und alle p aus $P_G(q_n)$ existiert ein U aus $U(w)$ mit $p \geqslant q$ auf U.

Dies folgt aus Lemma 6. Aus Lemma 7 folgt:

(5) (q_n) konvergiert gegen h'.

Aus Lemma 8 folgt:

(6) Für alle n aus $\mathbb{N}$ und alle k aus $P_G(q_n)$ mit $\|k\| \leqslant \frac{1}{2}$ ist k auf $P_G(h')$.

Nun folgt der Rest des Beweises: Sei f_G der nach Voraussetzung existierende stetige Schnitt für P_G, dann folgt aus (5), daß (q_n) gegen h' konvergiert und daraus, daß $(f_G(q_n))$ gegen $f_G(h')$ konvergiert. Aus (2) folgt, daß h' aus $P_G^{-1}(0)$ ist und daraus nach Voraussetzung der Nulleigenschaft des Schnittes, daß $f_G(h')$ gleich 0 ist. Also konvergiert $(f_G(q_n))$ gegen 0. Daraus folgt, daß es ein $n_0 \geq 2$ gibt mit $\|f_G(q_{n_0})\| \leq \frac{1}{2}$ und $\|f_G(q_{n_0})\| < r$.

Aus (6) folgt, da $f_G(q_{n_0})$ aus $P_G(q_{n_0})$ und $\|f_G(q_{n_0})\| \leq \frac{1}{2}$ ist, daß $f_G(q_{n_0})$ aus $P_G(h')$ ist.

Aus (3) folgt, da $f_G(q_{n_0})$ aus $P_G(h')$ und $\|f_G(q_{n_0})\| \leq \frac{1}{2}$ ist, daß $f_G)q_{n_0})$ aus $P_G(h)$ ist.

Aus (4) folgt, da $f_G(q_{n_0})$ aus $P_G(q_{n_0})$ und $n_0 \geq 2$ ist, daß ein U aus $U(w)$ existiert mit $f_G(q_{n_0}) \geq q$ auf U. Schließlich folgt aus (1), da es ein U aus $U(w)$ gibt mit $f_G(q_{n_0}) \geq q$ auf U und da $f_G(q_{n_0})$ aus $P_G(h)$ ist, daß $\|f_G(q_{n_0})\| \geq r$ ist. Dies ist ein Widerspruch zu $\|f_G(q_{n_0})\| < r$. Damit ist Satz 9 bewiesen.

Aus Satz 9 ergibt sich nun die angekündigte Nichtexistenzaussage für stetige Schnitte der metrischen Projektion in $C(X)$:

10. KOROLLAR. *Sei $E = C(X)$, wobei X ein kompakter, zusammenhängender Hausdorffraum ist, G ein proximinaler Teilvektorraum von E und $\langle P_G(f)\rangle$ endlich-dimensional für alle f aus E. Es existiere ein stetiger Schnitt $f_G\colon E \to G$ für $P_G\colon E \to 2^G$ mit der Nulleigenschaft. Dann ist G tschebyscheff.*

Beweis. Aus der Voraussetzung und Satz 9 folgt, daß $Z(P_G(f))$ offen ist für alle f aus $P_G^{-1}(0)$. Außerdem ist $Z(P_G(f))$ aus Stetigkeitsgründen abgeschlossen für alle f aus $P_G^{-1}(0)$.

Darüberhinaus ist $Z(P_G(f)) \neq \phi$ für alle f aus $P_G^{-1}(0)$ nach Lemma 1 in Blatter *et al.* [5]. Da X zusammenhängend ist, folgt für alle f aus $P_G^{-1}(0)$, daß $Z(P_G(f)) = X$ ist, d.h. $P_G(f) = \{0\}$, und daraus folgt die Behauptung. Damit ist Korollar 10 bewiesen.

Wir ersehen also, daß unter den Voraussetzungen von Korollar 10 im Fall, daß die Basismenge nicht tschebyscheff ist, und nur diese Situation ist für Schnittfragen interessant, kein stetiger Schnitt mit der Nulleigenschaft für die metrische Projektion existiert.

Lazar *et al.* versuchten in [16] zu beweisen, daß unter stärkeren Voraussetzungen als in Korollar 10 bei nicht tschebyscheffscher Basismenge in $C(X)$ kein stetiger Schnitt für die metrische Projektion existiert. Brown gab jedoch in [9] ein Gegenbeispiel an.

Im folgenden untersuchen wir eine weitere Konsequenz von Satz 9. Dazu sind die folgenden Begriffe notwendig:

11. DEFINITION. Es seien E und G topologische Räume.

(1) Eine mengenwertige Abbildung $F: E \to 2^G$ heißt *oberhalb-stetig*

genau dann, wenn $\{x \in E: F(x) \cap G' \neq \varnothing\}$ abgeschlossen ist für alle abgeschlossenen Teilmengen G' von G.

(2) Eine mengenwertige Abbildung $F: E \to 2^G$ heißt *unterhalb-stetig* genau dann, wenn $\{x \in E: F(x) \cap G' \neq \varnothing\}$ offen ist für alle offenen Teilmengen G' von G.

Nach Einführung dieser Begriffe sei erwähnt, daß Blatter *et al.* in [5] Satz 9 unter der Voraussetzung bewiesen haben, daß $P_G: E \to 2^G$ unterhalb-stetig sei, anstelle der Existenz eines stetigen Schnittes für $P_G: E \to 2^G$ mit der Nulleigenschaft.

Unter Verwendung des bekannten Schnittsatzes von Michael (siehe Michael [18], Theorem 3.2″, S. 364) und Satz 9 erhalten wir nun die folgende Aussage:

12. Satz. *Sei $E = C(X)$, wobei X ein kompakter Hausdorffraum ist, G ein proximinaler Teilvektorraum von E, $\langle P_G(f)\rangle$ endlich-dimensional für alle f aus E und sei $P_G: E \to 2^G$ oberhalb-stetig, dann gilt*:

(1) *Falls P_G unterhalb-stetig ist, existiert ein stetiger Schnitt f_G für P_G.*

(2) *Falls ein stetiger Schnitt f_G für P_G mit der Nulleigenschaft existiert, ist P_G unterhalb-stetig.*

Beweis. (1) folgt sofort aus dem oben erwähnten Schnittsatz von Michael.

(2) folgt ebenfalls unmittelbar aus Satz 9 und Theorem 2 in Blatter *et al.* [5].

Wie Singer [21] in Theorem 3.1, S. 386 bewiesen hat, ist P_G oberhalb-stetig, falls G approximativ-kompakt, also insbesondere, falls G ein endlich-dimensionaler Teilvektorraum ist.

13. *Bemerkung.* Aus Michaels Schnittsatz folgt unter gewissen Voraussetzungen aus der Unterhalb-Stetigkeit der metrischen Projektion die Existenz eines stetigen Schnittes für die metrische Projektion. Die Umkehrung ist im allgemeinen jedoch nicht richtig (siehe Lazar *et al.* [16], S. 198). Satz 12 zeigt jedoch, daß dies in bestimmten Fällen gilt, falls es sich um einen Schnitt mit der Nulleigenschaft handelt.

Als nächstes untersuchen wir stetige Schnitte mit der Nulleigenschaft für die metrische Projektion im Raum L_1 bei beliebigem σ-endlichen Maßraum.

Wie bereits erwähnt, bewiesen Lazar *et al.* eine Nichtexistenzaussage für stetige Schnitte der metrischen Projektion im Raum L_1 bei nichtatomarem Maßraum und endlich-dimensionaler Basismenge. Es stellt sich das Problem, ob man ähnliche Nichtexistenzaussagen beweisen kann, falls man die Bedingung, daß der Maßraum nichtatomar ist, fallen läßt.

Zunächst benötigen wir die folgenden Begriffe: Sei (X, S, u) ein σ-endlicher Maßraum mit positivem Maß u. Unter $L_1(X, S, u)$ verstehen wir den Raum aller reellen u-integrierbaren Funktionen auf X, wobei zwei Funktionen als identisch betrachtet werden, falls sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden. $L_1(X, S, u)$ sei versehen mit der üblichen Norm: $\|f\| := \int |f| \, du$ (f aus $L_1(X, S, u)$). Unter $L_\infty(X, S, u)$ verstehen wir den Raum aller reellen meßbaren, u-fast überall beschränkten Funktionen auf X, wobei ebenfalls zwei Funktionen als identisch betrachtet werden, falls sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden. $L_\infty(X, S, u)$ sei ebenfalls versehen mit der üblichen Norm: $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in X \setminus N_f\}$, wobei N_f die Nullmenge ist, außerhalb der f beschränkt ist.

Im folgenden identifizieren wir stets den stetigen Dualraum von $L_1(X, S, u)$ mit $L_\infty(X, S, a)$.

Eine Menge aus S heißt *Atom* genau dann, wenn $0 < u(A) < \infty$ ist und für alle B aus S mit $B \subseteq A$ gilt: $u(B) = 0$ oder $u(B) = u(A)$.

Sei X eine Menge und f eine reelle Funktion auf X. Dann verstehen wir unter $\operatorname{supp}(f)$ die Menge $\{x \in X: f(x) \neq 0\}$, unter $Z(f)$ die Menge $\{x \in X: f(x) = 0\}$ und, falls f beschränkt ist, unter $S(f)$ die Menge $\{x \in X: |f(x)| < \sup\{|f(y)| : y \in X\}\}$. Die obigen Mengen treten in Zusammenhang mit $L_1(X, S, u)$ und $L_\infty(X, S, u)$ auf und werden stets modulo Nullmengen interpretiert.

Sei E ein normierter Raum und G ein Teilvektorraum von E. Dann verstehen wir unter $G^\perp$ die Menge $\{f \in E': f(g) = 0$ für alle $g \in G\}$.

Notwendige Bedingungen für stetige Schnitte der metrischen Projektion sind bekannt in Zusammenhang mit Charakterisierungen solcher Schnitte für eindimensionale Räume als Basismenge in $C(X)$ bzw. l_1 (siehe Lazar *et al.* [16] und Lazar [15]). Wir geben eine notwendige Bedingung für stetige Schnitte der metrischen Projektion mit der Nulleigenschaft im Raum L_1 bei ebenfalls eindimensionaler Basismenge. Daraus folgt ein Korollar, das eine Nichtexistenzaussage für stetige Schnitte der metrischen Projektion mit der Nulleigenschaft im Raum L_1 darstellt.

14. SATZ. *Sei $E = L_1(X, S, u)$, wobei (X, S, u) ein σ-endlicher Maßraum sei, und G ein eindimensionaler Teilvektorraum von E, d.h. $G = \langle g_0 \rangle$ für ein g_0 aus G. Es existiere ein stetiger Schnitt $f_G: E \to G$ für $P_G: E \to 2^G$ mit der Nulleigenschaft. Dann existiert kein f aus $G^\perp$ mit $\|f\| = 1$, so daß $S(f) \subseteq Z(g_0)$ und* $\operatorname{supp}(g_0)$ *nicht Vereinigung endlich vieler Atome ist.*

Beweis. Angenommen, es existiert ein f aus $G^\perp$ mit $S(f) \subseteq Z(g_0)$ und $\|f\| = 1$ und $\operatorname{supp}(g_0)$ ist nicht die Vereinigung endlich vieler Atome. Wir zeigen, daß kein stetiger Schnitt f_G für P_G mit der Nulleigenschaft existiert.

Da $\operatorname{supp}(g_0)$ nicht die Vereinigung endlich vieler Atome ist, existiert eine Folge von Mengen (E_m) mit den folgenden Eigenschaften: Für alle m aus $\mathbb{N}$ ist E_m aus S, $u(E_m) > 0$, $E_m \subseteq \operatorname{supp}(g_0)$, fg_0 besitzt konstantes Vorzeichen auf E_m und außerdem konvergiert die Folge $(u(E_m))$ gegen Null. Ersetzt man notfalls g_0 duch $-g_0$ und nimmt lediglich eine Teilfolge von (E_m), so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $fg_0 < 0$ auf E_m ist für alle m aus $\mathbb{N}$.

Wir definieren nun die folgenden Funktionen aus $E := L_1(X, S, u)$:

$$
\begin{array}{lcl}
h := f\,|\,g_0\,| \text{ auf } X\setminus S(f) & \text{und} & h := 0 \text{ auf } S(f), \\
h_m := h \text{ auf } X\setminus E_m & \text{und} & h_m := 0 \text{ auf } E_m \quad (m \text{ aus } \mathbb{N}), \\
k_m := h \text{ auf } X\setminus E_m & \text{und} & k_m := g_0 \text{ auf } E_m \quad (m \text{ aus } \mathbb{N}).
\end{array}
$$

Dann gilt, *da* $(u(E_m))$ gegen Null konvergiert, daß sowohl die Folge (h_m) als auch die Folge (k_m) gegen h konvergiert. Wir zeigen nun die beiden folgenden Behauptungen:

Behauptung 1. 0 ist aus $P_G(h_m)$ für alle m aus $\mathbb{N}$.

Behauptung 2. $P_G(k_m) \cap \{g \in G: \|g\| < \|g_0\|\} = \emptyset$ für alle m aus $\mathbb{N}$. Daraus folgt dann, daß kein stetiger Schnitt f_G für P_G mit der Nulleigenschaft existiert.

Denn angenommen, es existiert solch ein Schnitt f_G, dann ist $f_G(h_m) = 0$ für alle m aus $\mathbb{N}$, da 0 aus $P_G(h_m)$ ist für alle m aus $\mathbb{N}$, und daraus folgt, da f_G stetig ist, daß $f_G(h) = 0$ sein muß. Andererseits folgt $\|f_G(k_m)\| \geq \|g_0\|$ für alle m aus $\mathbb{N}$, da $P_G(k_m) \cap \{g \in G: \|g\| < \|g_0\|\} = \emptyset$ ist für alle m aus $\mathbb{N}$, woraus folgt, daß die Folge $(f_G(k_m))$ nicht gegen $f_G(h) = 0$ konvergiert. Dies ist ein Widerspruch. Wir geben nun den Beweis von Behauptung 1: Wir zeigen, daß h_m aus $E\setminus\bar{G}$ und $f(h_m) = \|h_m\|$ ist für alle m aus $\mathbb{N}$.

Aus Singer [21], Satz 1.1, S. 18 folgt dann, daß 0 aus $P_G(h_m)$ ist für alle m aus $\mathbb{N}$.

Sei nun m aus $\mathbb{N}$, dann gilt:

$$f(h_m) = \int_{X\setminus(S(f)\cup E_m)} |\,g_0\,|\, du > 0.$$

Denn wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $u(\{E_n: n \neq m\}\setminus E_m) > 0$ ist. Aus der obigen Gleichung ergibt sich, da f aus $G^\perp$ ist, daß h_m aus $E\setminus\bar{G}$ ist.

Weiter gilt:

$$f(h_m) = \int_{X\setminus(S(f)\cup E_m)} f\cdot f\,|\,g_0\,|\, du = \int_{X\setminus(S(f)\cup E_m)} |\,g_0\,|\, du.$$

$$\|h_m\| = \int_{X\setminus(S(f)\cup E_m)} |\,f\,|\,g_0\,|\,|\, du = \int_{X\setminus(S(f)\cup E_m)} |\,g_0\,|\, du.$$

Damit ist $f(h_m) = \|h_m\|$.

Damit ist Behauptung 1 bewiesen.

Wir geben nun den Beweis von Behauptung 2: Zunächst zeigen wir, daß g_0 aus $P_G(k_m)$ ist für alle m aus $\mathbb{N}$. Dazu zeigen wir, daß k_m aus $E\setminus\bar{G}$ und $f(k_m - g_0) = \|k_m - g_0\|$ ist für alle m aus $\mathbb{N}$. Satz 1.1, S. 18 in Singer [21] liefert dann das Gewünschte.

Sei nun m aus $\mathbb{N}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} f(k_m) &= \int_{X\setminus(S(f)\cup E_m)} (|g_0| - fg_0)\, du \\ &\geq \int_{\bigcup\{E_n : n \neq m\}\setminus E_m} (|g_0| - fg_0)\, du \\ &= \int_{\bigcup\{E_n : n \neq m\}\setminus E_m} 2|g_0|\, du > 0. \end{aligned}$$

Dies gilt, da $S(f) \subseteq Z(g_0)$ und $fg_0 < 0$ auf allen E_m ist. Daraus folgt, da f aus $G^\perp$ ist, daß k_m aus $E\setminus\bar{G}$ ist.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} f(k_m - g_0) &= \int_{X\setminus(S(f)\cup E_m)} f(f|g_0| - g_0)\, du \\ &\quad + \int_{S(f)} f(0 - g_0)\, du + \int_{E_m} f(g_0 - g_0)\, du \\ &= \int_{X\setminus(S(f)\cup E_m)} (|g_0| - fg_0)\, du. \end{aligned}$$

Dies gilt, da $S(f) \subseteq Z(g_0)$ ist.

$$\begin{aligned} \|k_m - g_0\| &= \int_{X\setminus(S(f)\cup E_m)} |f|g_0| - g_0|\, du \\ &\quad + \int_{S(f)} |0 - g_0|\, du + \int_{E_m} |g_0 - g_0|\, du \\ &= \int_{X\setminus(S(f)\cup E_m)} (|g_0| - fg_0)\, du. \end{aligned}$$

Dies gilt, da $S(f) \subseteq Z(g_0)$ ist. Damit ergibt sich: $f(k_m - g_0) = \|k_m - g_0\|$. Sei nun m aus $\mathbb{N}$ und g aus G mit $\|g\| < \|g_0\|$, d.h. $g = ag_0$ für ein a mit $0 \leq |a| < 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \|k_m - g_0\| &= \int_{X\setminus(S(f)\cup E_m)} ||g_0| - fg_0|\, du \\ &= \int_{(X\setminus S(f)\cup E_m))\cap \operatorname{supp}(g_0)} |g_0|\, du + \int_{E_m} fg_0\, du. \end{aligned}$$

Dies gilt, da $\int_X fg_0\, du = 0$ ist.

Weiter gilt:

$$
\begin{aligned}
\| k_m - g \| &= \int_{X \setminus (S(f) \cup E_m)} | f | g_0 | - g | \, du + \int_{S(f)} | g | \, du + \int_{E_m} | g_0 - g | \, du \\
&= \int_{(X \setminus S(f) \cup E_m)) \cap \operatorname{supp}(g_0)} | | g_0 | - fg | \, du + \int_{E_m} | g_0 - g | \, du \\
&= \int_{(X \setminus S(f) \cup E_m)) \cap \operatorname{supp}(g_0)} | g_0 | \, du + \int_{E_m} fg \, du + \int_{E_m} | g_0 - g | \, du \\
&= \int_{(X \setminus S(f) \cup E_m)) \cap \operatorname{supp}(g_0)} | g_0 | \, du + \int_{E_m} afg_0 \, du \\
&\quad + \int_{E_m} (1 - a) | g_0 | \, du.
\end{aligned}
$$

Da $fg_0 < 0$ auf E_m und $0 \leqslant | a | < 1$ ist, ergibt sich, daß $\| k_m - g_0 \| < \| k_m - g \|$ ist. Daraus folgt schließich: $P_G(k_m) \cap \{ g \in G : \| g \| < \| g_0 \| \} = \emptyset$. Damit ist Satz 14 bewiesen.

15. KOROLLAR. *Sei $E = L_1(X, S, u)$, wobei (X, S, u) ein σ-endlicher Maßraum sei, und G ein eindimensionaler, nicht tschebyscheffscher Teilvektorraum von E, d.h. $G = \langle g_0 \rangle$ für ein g_0 aus G.* supp(g_0) *sei nicht die Vereinigung endlich vieler Atome. Dann existiert* kein *stetiger Schnitt f_G: $E \to G$ für P_G: $E \to 2^G$ mit der Nulleigenschaft.*

Beweis. Das Korollar folgt unmittelbar aus Phelps [20], Lemma 1 und Satz 14.

2. BOREL-MESSBARE SCHNITTE FÜR DIE METRISCHE PROJEKTION

Da stetige Schnitte für die metrische Projektion nur unter starken Voraussetzungen zu erhalten sind und in manchen Fällen, wie wir in Abschnitt 1 gesehen haben, überhaupt nicht existieren, stellt sich das Problem, ob Borel-meßbare Schnitte unter schwächeren Bedingungen existieren.

Wie wir u.a. zeigen, genügen schwache Kompaktheitseigenschaften der Basismenge G für die Existenz Borel-meßbarer Schnitte für P_G.

Diese Ergebnisse erhält man durch Anwendung zweier allgemeiner Sätze uber meßbare Schnitte von Himmelberg und van Vleck [12] (siehe Satz 2 und 3).

Zunächst benötigen wir die folgende Definition:

1. DEFINITION. (1) Sei E eine Menge mit σ-Algebra S_E und G eine Menge

mit σ-Algebra S_G, dann heißt eine Abbildung $f: E \to G$ (S_E, S_G)-*meßbar* genau dann, wenn $f^{-1}(G')$ aus S_E ist für alle G' aus S_G.

(2) Sei E ein topologischer Raum, dann bezeichnen wir mit B_E die von den abgeschlossenen Mengen in E erzeugte σ-Algebra und nennen sie die Familie der *Borelmengen* in E.

(3) Seien E und G topologische Räume, dann heißt eine Abbildung $f: E \to G$ *Borel-meßbar* genau dann, wenn f (B_E, B_G)-meßbar ist.

Nun formulieren wir die beiden oben erwähnten Schnittsätze von Himmelberg und van Vleck (siehe Theorems 5 und 3 in [12]):

2. SATZ. *Sei E eine Menge mit σ-Algebra S, G ein separabler metrischer Raum und $F: E \to 2^G$ eine mengenwertige Abbildung mit den folgenden Eigenschaften: $F(x)$ ist vollständig für alle x aus E und $\{x \in E: F(x) \cap G' \neq \emptyset\}$ ist aus S für alle abgeschlossenen Teilmengen G' von G. Dann existiert ein Schnitt $f: E \to G$ für $F: E \to 2^G$ mit der Eigenschaft: $f^{-1}(G')$ ist aus S für alle abgeschlossenen Teilmengen G' von G.*

3. SATZ. *Sei E eine Menge mit σ-Ring S, G ein separabler metrischer Raum und $F: E \to 2^G$ eine mengenwertige Abbildung mit den folgenden Eigenschaften: $F(x)$ ist abgeschlossen für alle x aus E und $\{x \in E: F(x) \cap G' \neq \emptyset\}$ ist aus S für alle kompakten Teilmengen G' von G. Dann existiert ein Schnitt $f: E \to G$ für $F: E \to 2^G$ mit der Eigenschaft: $f^{-1}(G')$ ist aus S für alle kompakten Teilmengen G' von G.*

Bevor wir den ersten Satz über Borel-meßbare Schnitte für die metrische Projektion beweisen, bemerken wir, daß $P_G(x)$ abgeschlossen (bzw. konvex) ist für alle x aus E, falls G abgeschlossen (bzw. konvex) ist (siehe Singer [21]).

4. SATZ. *Sei E ein metrischer Raum und G eine separable, approximativ-kompakte Teilmenge von E, dann existiert ein Borel-meßbarer Schnitt f_G: $E \to G$ für $P_G: E \to 2^G$.*

Beweis. Da G approximativ-kompakt ist, ist G proximinal und abgeschlossen (siehe Singer [21], Theorem 2.1, S.382). Wir zeigen nun, daß $P_G(x)$ kompakt, also insbesondere vollständig ist für alle x aus E. Sei x aus E gegeben. Dann ist $P_G(x)$ abgeschlossen, da G abgeschlossen ist. Außerdem ist $P_G(x)$ folgenkompakt, denn es gilt: Sei $(g_n) \subseteq P_G(x)$, dann ist $d(x, g_n) = d(x, G)$ und daraus folgt, da G approximativ-kompakt ist: es existiert ein g aus G und eine Teilfolge (g_{n_k}) von (g_n), welche gegen g konvergiert.

Damit haben wir die Kompaktheit von $P_G(x)$ gezeigt. Aus Theorem 3.1 (Singer [21]) folgt, da G approximativ-kompakt ist, daß $\{x \in E: P_G(x) \cap$

$G' \neq \emptyset\}$ abgeschlossen, also insbesondere aus B_E ist für alle abgeschlossenen Teilmengen G' von G.

Wendet man nun Satz 2 an und beachtet, daß G separabel ist, so gilt: es existiert ein Schnitt f_G für P_G mit der Eigenschaft: $f^{-1}(G')$ ist aus B_E für alle abgeschlossenen Teilmengen G' von G. Da die abgeschlossenen Mengen in G die σ-Algebra B_G erzeugen, gilt schließlich: $f^{-1}(G')$ ist aus B_E für alle G' aus B_G, d.h. f_G ist Borel-meßbar.

Damit ist Satz 4 bewiesen.

5. SATZ. *Sei E ein normierter Raum, G ein separabler, proximinaler Teilvektorraum von E und P_G: $E \to 2^G$ oberhalb-stetig. Dann existiert ein Borel-meßbarer Schnitt f_G: $E \to G$ für P_G: $E \to 2^G$.*

Beweis. Aus Singer [22], Theorem 1 folgt, da G ein proximinaler Teilvektorraum und P_G oberhalb-stetig ist, daß $P_G(x)$ kompakt, also insbesondere vollständig ist für alle x aus E. Da P_G oberhalb-stetig ist, ist $\{x \in E\colon P_G(x) \cap G' \neq \emptyset\}$ abgeschlossen, also insbesondere aus B_E für alle abgeschlossenen Teilmengen G' von G.

Wendet man nun Satz 2 an und beachtet, daß G separabel ist, so folgt analog wie in Satz 4, daß ein Borel-meßbarer Schnitt f_G für P_G existiert.

Damit ist Satz 5 bewiesen.

Als Korollar zu Satz 5 erhalten wir:

6. KOROLLAR. *Sei E ein normierter Raum, G ein proximinaler, separabler Teilvektorraum von E und $P_G^{-1}(0)$ beschränkt-kompakt. Dann existiert ein Borel-meßbarer Schnitt f_G: $E \to G$ für P_G: $E \to 2^G$.*

Beweis. Das Korollar folgt aus Theorem 2 in Morris [19], in dem gezeigt wir, daß für einen proximinalen Teilvektorraum G eines normierten Raumes E aus der Beschränkt-Kompaktheit von $P_G^{-1}(0)$ die Oberhalb-Stetigkeit von P_G folgt, und Satz 5.

Für den nächsten Satz benötigen wir die folgende Definition:

7. DEFINITION. Sei G ein topologischer Raum, dann bezeichnen wir mit K_G den von den kompakten Mengen in G erzeugten σ-Ring.

8. SATZ. *Sei E ein metrischer Raum und G eine proximinale, separable Teilmenge von E. Dann existiert ein (B_E, K_G)-meßbarer Schnitt f_G: $E \to G$ für P_G: $E \to 2^G$.*

Beweis. Aus der Proximinalität von G folgt, daß G abgeschlossen ist und daraus, daß $P_G(x)$ abgeschlossen ist für alle x aus E.

Wir zeigen nun, daß $\{x \in E\colon P_G(x) \cap G' \neq \emptyset\}$ abgeschlossen, also insbesondere aus B_E ist für alle kompakten Teilmengen G' von G.

Sei namlich $G' \subseteq G$ kompakt und $M := \{x \in E: P_G(x) \cap G' \neq \emptyset\}$. Sei weiter x aus E und (x_n) eine Folge in M, die gegen x konvergiert. Dann existiert eine Folge (g_n) in G mit $g_n \in P_G(x_n) \cap G'$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da G' kompakt ist, gilt: es existiert ein g_0 aus G' und eine Teilfolge (g_{n_k}) von (g_n), die gegen g_0 konvergiert. Wir zeigen: g_0 ist aus $P_G(x)$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} d(x, G) &\leq d(x, g_0) \leq d(x, g_{n_k}) + d(g_{n_k}, g_0) \\ &\leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, g_{n_k}) + d(g_{n_k}, g_0) \\ &= d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, G) + d(g_{n_k}, g_0) \\ &\leq 2d(x, x_{n_k}) + d(x, G) + d(g_{n_k}, g_0). \end{aligned}$$

Da (x_{n_k}) gegen x und (g_{n_k}) gegen g_0 konvergiert, folgt $d(x, g_0) = d(x, G)$ und daraus, da $g_0 \in G' \subseteq G$ ist, daß g_0 aus $P_G(x)$ ist. Daraus folgt $P_G(x) \cap G' \neq \emptyset$, d.h. x ist aus M. Wendet man nun Satz 3 an und beachtet, daß G separabel ist, so gilt: es existiert ein Schnitt f_G für P_G mit der Eigenschaft: $f_G^{-1}(G')$ ist aus B_E für alle kompakten Teilmengen G' von G. Daraus folgt, da die kompakten Mengen in G den σ-Ring K_G erzeugen, daß $f_G^{-1}(G')$ aus B_E ist für alle G' aus K_G. Damit ist f_G (B_E, K_G)-meßbar und Satz 8 bewiesen.

Aus Satz 8 ergibt sich folgendes Korollar:

9. KOROLLAR. *Sei E ein metrischer Raum und G eine proximinale, separable und σ-kompakte Teilmenge von E. Dann existiert ein Borel-meßbarer Schnitt $f_G: E \to G$ für $P_G: E \to 2^G$.*

Beweis. Da G σ-kompakt ist, folgt $B_G = K_G$. Aus Satz 7 folgt dann die Existenz eines (B_E, B_G)-meßbaren Schnittes $f_G: E \to G$ für $P_G: E \to 2^G$. Das heißt aber gerade, daß f_G Borel-meßbar ist.

Damit ist Korollar 8 bewiesen.

3. Quasi-additive, homogene Schnitte und Schnitte mit der Sonneneigenschaft für die metrische Projektion

Wie wir gesehen haben, existieren Borel-meßbare Schnitte für P_G bereits bei schwachen Kompaktheitseigenschaften der Basismenge G. Es stellt sich somit die Frage, welche Schnitteigenschaften P_G besitzt, falls keinerlei Kompaktheitsforderungen an G gestellt werden. Wir beweisen drei allgemeine Schnittsätze, die, angewandt auf die metrische Projektion, zeigen, daß bei proximinalem Teilvektorraum G ein quasi-additiver, bzw. ein homogener Schnitt existieren und bei einem proximinalen Kegel G mit Scheitel in 0 ein positiv-homogener Schnitt existiert. Die Homogenität und Quasi-Additivität gehen bei Kegeln verloren.

Dazu geben wir folgende Definitionen:

1. DEFINITION. Seien E und G Vektorräume über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, sowie F und F' mengenwertige Abbildungen von E in 2^G.

(1) F heißt *homogen* (bzw. *positiv-homogen*), falls $F(ax) = aF(x)$ ist für alle x aus E und alle a aus $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ (bzw. $a \geq 0$).

(2) Sei nun G zusätzlich ein Teilvektorraum von E. F heißt *quasi-additiv*, falls $F(x + g) = F(x) + F(g)$ ist für alle x aus E und alle g aus G.

(3) F heißt *quasi-linear*, falls F homogen und quasi-additiv ist.

Für punktwertige Abbildungen f von E in G gelten die Definitionen (1) bis (3) analog.

(4) Sei nun G eine Teilmenge des Vektorraumes E. Dann heißt G *Fixpunktmenge von F* genau dann, wenn $F(g) = \{g\}$ ist für alle g aus G.

Im folgenden stehe $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

2. SATZ. *Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, G ein Teilvektorraum von E und $F\colon E \to 2^G$ eine quasi-additive mengenwertige Abbildung mit Fixpunktmenge G. Dann existiert ein quasi-additiver Schnitt $f\colon E \to G$ für $F\colon E \to 2^G$.*

Beweis. (1) Wir definieren eine wohlbekannte Äquivalenzrelation: Für x, y aus E sei $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y$ aus G ist.

(2) Den Schnitt f definieren wir folgendermaßen: Sei A eine $\sim$-Äquivalenzklasse in E. Wir wählen einen beliebigen Repräsentanten x aus A und außerdem ein beliebiges Element g_0 aus $F(x)$. Dann definieren wir: $f(x) := g_0$. Jedes y aus A hat eine Darstellung $y = x + g$ für ein g aus G. Für y definieren wir $f(y) := f(x) + g$. f ist wohldefiniert, da $\sim$ eine Zerlegung von E in disjunkte Äquivalenzklassen bewirkt.

(3) f ist ein Schnitt für F, denn es gilt: Sei y aus A mit der Darstellung $y = x + g (g \in G)$. Dann ist $f(y) = f(x) + g \in F(x) + g = F(x) + F(g) = F(x + g) = F(y)$.

(4) f ist quasi-additiv, denn es gilt: Sei y aus E und g' aus G'. Dann liegt y in genau einer Äquivalenzklasse A mit wie in (2) gewähltem Repräsentanten x, d.h. $y = x + g$ für ein g aus G. Dann gilt: $f(y + g') = f(x + g + g') = f(x) + g + g' = f(x + g) + g' = f(y) + g' = f(y) + f(g')$.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wir bemerken, daß es in Satz 2 genügt, wie man sofort aus dem Beweis ersieht, zu fordern, daß $F(x) + F(g) \subseteq F(x + g)$ ist für alle x aus E und alle g aus G.

Wir wenden nun Satz 2 auf die metrische Projektion an:

3. KOROLLAR. *Sei E ein normierter Raum und G ein proximinaler Teil-*

vektorraum. Dann existiert ein quasi-additiver Schnitt $f_G: E \to G$ *für* $P_G: E \to 2^G$.

Beweis. Wir zeigen, daß P_G quasi-additiv ist:

Seien x aus E und g aus G. Sei g_0 aus $P_G(x + g)$, so folgt: $\|x - (g_0 - g)\| = \|(x + g) - g_0\| = \inf\{\|(x + g) - g'\| : g' \in G\} = \inf\{\|x - g'\| : g' \in G\}$. Daraus folgt: $g_0 - g \in P_G(x)$, d.h. $g_0 \in P_G(x) + \{g\} = P_G(x) + P_G(g)$. Sei andererseits g_0 aus $P_G(x) + P_G(g) = P_G(x) + \{g\}$, so folgt: $g_0 - g \in P_G(x)$, d.h. $\|(x + g) - g_0\| = \|x - (g_0 - g)\| = \inf\{\|x - g'\| : g' \in G\} = \inf\{\|(x + g) - g'\| : g' \in G\}$. Also ist g_0 aus $P_G(x + g)$.

Daß G Fixpunktmenge von P_G ist folgt unmittelbar aus der Definition der metrischen Projektion. Satz 2 liefert nun die Behauptung.

Damit ist Korollar 3 bewiesen.

4. Satz. *Seien* E *und* G $\mathbb{K}$-*Vektorräume und* $F: E \to 2^G$ *eine homogene mengenwertige Abbildung. Dann existiert ein homogener Schnitt* $f: E \to G$ *für* $F: E \to 2^G$.

Beweis. (1) Wir definieren für $x, y \in E$: $x \sim y$ genau dann, wenn $x = ay$ für ein $a \in \mathbb{K}$ $(a \neq 0)$. $\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation auf E, denn es gilt: $1 \in \mathbb{K}$ und ($x = ay$ genau dann, wenn $y = (1/a)x$) und (aus $x = ay$, $y = bz$ folgt $x = abz$).

(2) Den Schnitt f definieren wir folgendermaßen: Sei A eine $\sim$-Äquivalenzklasse in E. Wir wählen einen beliebigen Repräsentanten x aus A und ein beliebiges Element g_0 aus $F(x)$. Dann definieren wir: $f(x) := g_0$. Sei nun y aus A, dann gilt: $y = ax$ für ein $a \in \mathbb{K}$ $(a \neq 0)$. Wir definieren: $f(y) := af(x)$. Da 0 aus $F(0)$ ist nach Voraussetzung, definieren wir: $f(0) := 0$. $f: E \to G$ ist wohldefiniert, da $\sim$ eine Zerlegung von E in disjunkte Äquivalenzklassen bewirkt.

(3) f ist ein Schnitt für F, denn es gilt: Sei y aus A wie in (2) mit der Darstellung $y = ax$ für ein $a \in \mathbb{K}$ $(a \neq 0)$. Dann ist $f(y) = af(x) \in aF(x) = F(ax) = F(y)$. Außerdem ist $f(0) = 0 \in F(0)$.

(4) f ist homogen, denn es gilt: (a) Sei $y \in E$ und $a' \in \mathbb{K}$ $(a' \neq 0)$. Dann liegt y in genau einer Äquivalenzklasse A mit wie in (2) gewähltem Repräsentanten x, d.h. $y = ax$ für ein $a \in \mathbb{K}$ $(a \neq 0)$. Daraus folgt: $f(a'y) = f(aa'x) = a'af(x) = a'f(ax) = a'f(y)$. (b) Der Fall $y \in E$, $a' = 0$ ist trivial.

Damit ist Satz 4 bewiesen.

Auch in Satz 4 genügt es zu fordern, daß $aF(x) \subseteq F(ax)$ ist für alle x aus E und alle a aus $\mathbb{K}$.

Wir wenden nun Satz 4 auf die metrische Projektion an:

5. Korollar. *Sei* E *ein normierter Raum und* G *ein proximinaler Teil-*

vektorraum von E. Dann existiert ein homogener Schnitt $f_G: E \to G$ für $P_G: E \to 2^G$.

Beweis. Wir zeigen, daß P_G homogen ist. Der Fall x aus E und $a = 0$ ist trivial. Seien daher x aus E und $a \in \mathbb{K}$ $(a \neq 0)$. Sei g_0 aus $P_G(ax)$, so gilt: $|a| \, \|x - (1/a) g_0\| = \|ax - g_0\| = \inf\{\|ax - g\| : g \in G\} = |a| \inf\{\|x - g\| : g \in G\}$, d.h. $(1/a) g_0$ ist aus $P_G(x)$, also ist g_0 aus $aP_G(x)$. Sei andererseits g_0 aus $aP_G(x)$, dann gilt: $|1/a| \, \|ax - g_0\| = \|x - (1/a) g_0\| = \inf\{\|x - g\| : g \in G\} = |1/a| \inf\{\|ax - g\| : g \in G\}$, d.h. g_0 ist aus $P_G(ax)$. Satz 4 liefert nun die Behauptung.

Damit ist Korollar 5 bewiesen.

6. SATZ. *Seien E und G beliebige Kegel mit Scheitel in 0, welche in $\mathbb{K}$-Vektorräumen liegen, und $F: E \to 2^G$ eine positiv-homogene mengenwertige Abbildung. Dann existiert ein positiv-homogener Schnitt $f: E \to G$ für $F: E \to 2^G$.*

Beweis. Wir definieren für x, y aus E: $x \sim y$ genau dann, wenn $x = ay$ für ein $a \in \mathbb{K}$ $(a > 0)$ ist. $\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation auf E, denn es gilt: $1 > 0$ und ($x = ay$ genau dann, wenn $y = (1/a) x$ ist) und (aus $x = ay$, $y = bz$ folgt $x = abz$). Der Rest des Beweises folgt nun analog dem von Satz 4. Damit ist Satz 6 bewiesen.

In Satz 7 genügt es wiederum zu fordern, daß $aF(x) \subseteq F(ax)$ ist für alle x aus E und alle $a \geqslant 0$.

Wir wenden nun Satz 6 auf die metrische Projektion an:

7. KOROLLAR. *Sei E ein normierter Raum und G ein proximinaler Kegel in E mit Scheitel in 0. Dann existiert ein positiv-homogener Schnitt $f_G: E \to G$ für $P_G: E \to 2^G$.*

Beweis. Die Positiv-Homogenität von P_G zeigt man analog wie im Beweis zu Korollar 5 die Homogenität von P_G. Satz 6 liefert nun die Behauptung.

Damit ist Korollar 7 bewiesen.

8. *Bemerkung.* Unter der Voraussetzung von Satz 6 und Korollar 7 existiert kein homogener und auch kein quasi-additiver Schnitt, nicht einmal, falls E ein Hilbertraum und G ein proximinaler konvexer Kegel mit Scheitel in 0 ist. Dies ist, wie man leicht anhand von einfachen Beispielen zeigt, schon für $E = \mathbb{R}^2$ nicht mehr erfüllt.

Betrachtet man Satz 2 und Satz 4, so stellt sich sofort die Frage, ob es möglich ist unter der Voraussetzung der Quasi-Linearität einer mengenwertigen Abbildung einen quasi-linearen Schnitt für diese Abbildung zu bekommen. Die Methoden der Äquivalenzklassenzerlegung aus den Beweisen zu Satz 2 und Satz 4 versagen.

Geht man jedoch von einem endlich-dimensionalen Teilvektorraum G

eines normierten Raumes E bei einer mengenwertigen Abbildung $F: E \to 2^G$ aus und verwendet eine völlig andere Methode bei der Wahl des Schnittes, so erhält man, grob gesprochen, die erwartete Aussage, wie Satz 12 zeigen wird.

Dieser Satz steht noch in einem anderen Zusammenhang. Brosowski und Deutsch führen in [6] den Begriff der Inner- und Außer-Radial-Unterhalb-Stetigkeit der metrischen Projektion ein. Grob formuliert versteht man darunter die Unterhalb-Stetigkeit der metrischen Projektion bzgl. gewisser "Strecken." In Analogie dazu definieren wir:

9. Definition. Seien E und G normierte Räume und $F: E \to 2^G$ eine mengenwertige Abbildung. Ein *Schnitt* $f: E \to G$ für $F: E \to 2^G$ heißt *radial-stetig* genau dann, wenn für jedes x aus E und jede Folge $(x_n) \subseteq \{f(x) + a(x - f(x)): a \in \mathbb{K}\}$ mit $x_n \to x$ gilt: $f(x_n) \to f(x)$.

Ein schärferer Begriff ergibt sich durch die folgende Überlegung: Efimov und Steckin führen in [11] den Begriff der Sonne ein, der sich als wichtig für die Approximationstheorie erwiesen hat:

10. Definition. Sei E ein normierter Raum und G eine Teilmenge von E. G heißt *Sonne* genau dann, wenn für alle x aus E und alle g_0 aus $P_G(x)$ gilt: g_0 ist aus $P_G(y)$ für alle y aus $\{g_0 + a(x - g_0): a \geq 0\}$.

Es ist bekannt, daß jede konvexe Menge eine Sonne ist. Betrachten wir einen tschebyscheffschen Teilvektorraum G als Basismenge und bezeichnen mit $f_G: E \to G$ die punktwertige metrische Projektion, so gilt: für alle x aus E und alle y aus $\{f_G(x) + a(x - f_G(x)): a \in \mathbb{K}\}$ ist $f_G(x) = f_G(y)$. Dies liegt an der Quasi-Linearität der metrischen Projektion, wie sie sich aus den Beweisen zu Korollar 3 und 5 ergibt.

Ausgehend von diesen Überlegungen definieren wir:

11. Definition. Seien E und G normierte Räume und $F: E \to 2^G$ eine beliebige mengenwertige Abbildung. Eine *Schnitt* $f: E \to G$ für $F: E \to 2^G$ besitzt die *Sonneneigenschaft* genau dann, wenn für alle x aus E und alle y aus $\{f(x) + a(x - f(x)): a \in \mathbb{K}\}$ gilt: $f(x) = f(y)$.

Es ergibt sich somit das Problem, wann ein Schnitt mit dieser Eigenschaft existiert. Dazu zeigen wir:

12. Satz. *Sei E ein normierter Raum, G ein endlich-dimensionaler Teilvektorraum von E und $F: E \to 2^G$ eine quasi-lineare mengenwertige Abbildung mit G als Fixpunktmenge. Außerdem sei $F(x)$ abgeschlossen und konvex für alle x aus E. Dann existiert ein quasi-linearer Schnitt $f: E \to G$ für $F: E \to 2^G$ mit der Sonneneigenschaft.*

Beweis. Da G endlich-dimensional ist, existiert eine zur gegebenen Norm $\|\cdot\|$ äquivalente Norm $\|\cdot\|_1$ auf E, welche strikt konvex ist (siehe Köthe [14]).

Da $F(x)$ abgeschlossen und konvex ist für alle x aus E, ist $x - F(x)$ abgeschlossen und konvex für alle x aus E. Man weiß, daß in jedem strikt konvexen Raum jede abgeschlossene, konvexe Menge semi-tschebyscheff ist. Daraus folgt nun in unserem Fall: Für alle x aus E gibt es genau ein y_x aus $x - F(x)$ mit $\| y_x \|_1 = \min\{\| y \|_1 : y \in x - F(x)\}$. Die Existenz von y_x für x aus E folgt aus der Tatsache, daß G endlich-dimensional ist.

Wir definieren für alle x aus E: $f(x) := x - y_x \in F(x)$. Wir zeigen nun:

(1) f ist homogen.

Seien x aus E und a aus $\mathbb{K}$, dann gilt: $ay_x \in a(x - F(x)) = ax - F(ax)$. Dies folgt aus der Homogenität von F. Weiter gilt: $\min\{\| y \|_1 : y \in ax - F(ax)\} = \min\{\| ay \|_1 : y \in x - F(x)\} = | a | \min\{\| y \|_1 : y \in x - F(x)\} = | a | \| y_x \|_1 = \| ay_x \|_1$. Da die Wahl des Schnittes eindeutig ist, folgt: $y_{ax} = ay_x$. Daraus folgt: $f(ax) = ax - y_{ax} = ax - ay_x = a(x - y_x) = af(x)$.

(2) f ist quasi-additiv.

Seien x aus E und g aus G, dann gilt:

$$y_x \in x - F(x) = x + g - (F(x) + g) = x + g - F(x + g).$$

Dies folgt aus der Quasi-Additivität von F und der Voraussetzung, daß G Fixpunktmenge von F ist. Weiter gilt: $\min\{\| y \|_1 : y \in x + g - F(x + g)\}$

$$\begin{aligned} &= \min\{\| y \|_1 : y \in x + g - F(x) - F(g)\} \\ &= \min\{\| y \|_1 : y \in x + g - F(x) - g\} \\ &= \min\{\| y \|_1 : y \in x - F(x)\} = \| y_x \|_1 . \end{aligned}$$

Da die Wahl des Schnittes eindeutig ist, folgt $y_{x+g} = y_x$. Daraus folgt: $x + g - f(x + g) = x - f(x)$, also $f(x + g) = f(x) + g = f(x) + f(g)$. Aus (1) und (2) folgt die Quasi-Linearität des Schnittes $f: E \to G$.

(3) Der Schnitt $f: E \to G$ besitzt die Sonneneigenschaft. Seien x aus E und $y = f(x) + a(x - f(x))$, wobei a aus $\mathbb{K}$ ist. Da F quasi-linear und G Fixpunktmenge von F ist, gilt: $ay_x \in f(x) + a(x - f(x)) - F(f(x) + a(x - f(x)))$, denn es ist: $f(x) + a(x - f(x)) - F(f(x) + a(x - f(x))) = f(x) + a(x - f(x)) - F(f(x)) - aF(x) + aF(f(x)) = f(x) + a(x - f(x)) - f(x) - aF(x) + af(x) = ax - F(ax) = a(x - F(x))$.

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} &\min\{\| y \|_1 : y \in f(x) + a(x - f(x)) - F(f(x) + a(x - f(x)))\} \\ &\quad = \min\{\| y \|_1 : y \in ax - aF(x)\} = | a | \min\{\| y \|_1 : y \in x - F(x)\} \\ &\quad = | a | \| y_x \|_1 = \| ay_x \|_1 . \end{aligned}$$

Da die Wahl des Schnittes eindeutig ist, folgt, $y_{f(x)+a(x-f(x))} = ay_x$, also

$f(x) + a(x - f(x)) + f(f(x) + a(x - f(x)) = ax - af(x)$ und somit $f(y) = f(x)$.

Damit ist Satz 12 bewiesen.

Unter Verwendung von Satz 12 erhalten wir folgendes Korollar:

13. KOROLLAR. *Sei E ein normierter Raum und G ein endlich-dimensionaler Teilvektorraum von E. Dann existiert ein quasi-linearer Schnitt f_G: $E \to G$ für P_G: $E \to 2^G$ mit der Sonneneigenschaft.*

Beweis. Da P_G, wie man aus den Beweisen zu Korollar 3 und Korollar 5 ersieht, quasi-linear ist und G als Fixpunktmenge besitzt, folgt Korollar 13 unmittelbar aus Satz 12.

ACKNOWLEDGMENT

Meinem sehr verehrten Lehrer Herrn Professor Dr. D. Kölzow danke ich recht herzlich für seine wissenschaftliche Unterstützung, insbesondere dafür, daß er mir den Themenkreis meiner Dissertation vorgeschlagen hat.

REFERENCES

1. N. J. ACHIESER, "Theory of Approximation," Ungar, New York, 1956.
2. J. BLATTER, Zur Stetigkeit von mengenwertigen metrischen Projektionen, Schriften des Rheinisch-Westfälischen Instituts für Instrumentelle Mathematik an der Universität Bonn, Serie A Nr. 16 (1967) (zugleich Forschungsbericht des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 1870).
3. J. BLATTER, Approximative Kompaktheit verallgemeinerter rationaler Funktionen, *J. Approximation Theory* **1** (1968), 85–93.
4. J. BLATTER, Grothendieck spaces in approximation theory, *Mem. Amer. Math. Soc.*, No. 120 (1972).
5. J. BLATTER, P. D. MORRIS, AND D. E. WULBERT, Continuity of set-valued metric projections, *Math. Ann.* **178** (1968), 12–24.
6. B. BROSOWSKI AND F. DEUTSCH, Some new continuity concepts for metric projections, *Bull. Amer. Math. Soc.* **78** (1972), 974–978.
7. B. BROSOWSKI AND F. DEUTSCH, On some geometric properties of suns, *J. Approximation Theory* **10** (1974), 245–267.
8. A. L. BROWN, Best n-dimensional approximation of functions, *Proc. London Math. Soc.* **14** (1964), 577–594.
9. A. L. BROWN, On continuous selections for metric projections in spaces of continuous functions, *J. Functional Analysis* **8** (1971), 431–499.
10. E. W. CHENEY, "Introduction to Approximation Theory," McGraw-Hill, New York, 1966.
11. N. EFIMOV AND S. STECKIN, Some properties of Chebyshev sets, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **118** (1958), 17–19.
12. C. J. HIMMELBERG AND F. S. VAN VLECK, Some selection theorems for measurable functions, *Canad. J. Math.* **21** (1969), 394–399.

13. V. KLEE, Remarks on nearest points in normed linear spaces, *in* "Proceedings of the Colloquium on Convexity, Copenhagen 1965," pp. 168–176, Copenhagen 1967.
14. G. KÖTHE, "Topologische lineare Räume," Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960.
15. A. J. LAZAR, Spaces of affine continuous functions on simplexes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **134** (1968), 503–525.
16. A. J. LAZAR, D. E. WULBERT, AND P. D. MORRIS, Continuous selections for metric projections, *J. Functional Analysis* **3** (1969), 193–216.
17. G. MEINARDUS, "Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung," Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg/New York, 1964.
18. E. A. MICHAEL, Continuous selections I, *Ann. of Math.* **63** (1956), 361–382.
19. P. D. MORRIS, Metric projections onto subspaces of finite codimension, *Duke Math. J.* **35** (1968), 799–808.
20. R. R. PHELPS, Chebysec subspaces of finite dimension in L_1, *Proc. Amer. Math. Soc.* **17** (1966), 646–652.
21. I. SINGER, "Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970.
22. I. SINGER, On set-valued metric projections, *in* "Proceedings of the Colloquium on Linear Operators and Approximation, Oberwolfach (1971)."
23. I. SINGER, "The Theory of Best Approximation and Functional Analysis," Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1974.